

Алғашқы функция (анықталмаған интеграл) — есептер

Нұсқау. Әр есепте $F'(x) = f(x)$ болатын $F(x)$ алғашқы функциясын табыңыз (жалпы түрін — тұрақты $+C$ қоса көрсетіңіз). Қажет жерлерде алмастыру немесе бөлшектеу әдісін қолданыңыз.

I. Негізгі деңгей (қарапайым ережелер)

1. $f(x) = 3x^2$. (Алғашқы функцияны табыңыз.)
2. $f(x) = \cos x$.
3. $f(x) = \frac{2}{x}, x \neq 0$.
4. $f(x) = 5e^{5x}$.

II. Орташа деңгей (қосынды, қуат, қарапайым алмастыру)

5. $f(x) = 4x^3 - 6x$.
6. $f(x) = \sin(2x)$. (Алғашқы функцияны табыңыз.)
7. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, x > 0$.
8. $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$. (Қажет болса алмастыру $u = x^2 + 1$.)

III. Алмастыру және бөлшектеу (аздап күрделірек)

9. $f(x) = x \cos(x^2)$. (Алмастыру $u = x^2$.)
10. $f(x) = \frac{3x^2}{(x^3 + 1)^2}$. (Алмастыру $u = x^3 + 1$.)
11. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$. (Тригонометриялық алмастыру / стандарт формалар.)

IV. Интеграция бойынша әртүрлі әдістер

12. $f(x) = xe^x$. (Бөлшектеу — интегралдық бөліп алу / интеграл бойынша бөліп алу (integration by parts) кері амалымен.)
13. $f(x) = \ln x, x > 0$. (Интеграл $\int \ln x dx$ — бөліп алу арқылы.)
14. $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$. (Рационал функция; бөлу және кейінгі қарапайым интегралдар.)

V. Қосымша (сынақ/мысалдар — жоғары деңгей)

15. $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+2)}$. (Алдымен бөлшектеу: парциалды бөлшектеу / partial fractions.)
16. $f(x) = \sin^2 x$. (Тригонометриялық тождылықтарды қолданып $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$.)
17. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, |x| < 1$. (Арксинусқа жататын стандарт түр.)

VI. Теориялық / түсінікке арналған тапсырмалар

18. Егер $F(x)$ — $f(x)$ -тің алғашқы функциясы болса, $G(x)$ тағы бір алғашқы функция екенін дәлелдеңіз және $G(x)$ -тің $F(x)$ -тен айырмашылығы қандай шамамен болатынын көрсетіңіз.
19. Алғашқы функция және анықталмаған интеграл: $\int (af(x) + bg(x)) dx$ қасиетін дәлелдеңіз (мұндағы a, b — тұрақты шамалар).
20. Алғашқы функцияны табу әрқашан мүмкін бе? $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ e^{-1/x^2}, & x > 0 \end{cases}$ сияқтыларын қарастыру мысалында айтыңыз (қысқаша түсінік).

